On retrouve ce document, enrichi de questions types pour tester ses connaissances, dans le livre :

Questions délicates en Algèbre et Géométrie.

Matrice de passage et changement de base

Soient $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour travailler dans cet espace vectoriel, on utilise souvent une base et les coordonnées des vecteurs dans cette base. Mais dans tous les chapitres d'algèbre linéaire ou bilinéaire, il y a des moments où l'on souhaite changer de base et l'on rencontre alors des difficultés :

- Comment se souvenir de ce qu'il y a dans la matrice de passage ?
- La matrice de passage, oui, mais de quelle base à quelle base ?
- Est-ce P ou P^{-1} ou ${}^tP$ ou ${}^tP^{-1}$ qui intervient pour le problème que l'on étudie ?

Autant de questions que chacun se pose un jour ou l'autre surtout quand le cours sur le chapitre concerné est un peu loin dans la mémoire. Les matrices de passage peuvent aussi faire l'objet de questions « indiscrètes » à l'oral de l'agrégation. Et, dans un cours de premier cycle, comment présenter cette notion aux étudiants pour essayer d'éviter les erreurs ?

Voici une liste de situations où interviennent les matrices de passage. Chacune de ces situations est expliquée et illustrée par un exemple simple, mais significatif, dans ce document.
On peut « naviguer » dans ce document en l'ouvrant avec acrobat reader ou adobe reader pour y trouver plus vite l'information utile. Les principales difficultés sont écrites en rouge et soulignés, les choses à retenir sont en italique.

1. le changement de coordonnées, rapport avec la dualité ;
2. le(s) changement(s) de base pour une application linéaire ;
   $f\ :\ E \longrightarrow F$ ou $f\ :\ E \longrightarrow E$
3. le changement de base pour une forme bilinéaire ;
4. le changement de base pour une forme quadratique ;
5. le changement de base pour une forme hermitienne ;
6. la diagonalisation des matrices symétriques et application aux formes quadratiques ;
7. la réduction simultanée de deux formes quadratiques ;
8. les opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice ;
9. la recherche d'une base adaptée pour un sous-module d'un module libre de type fini sur un anneau principal (le plus souvent euclidien) ;
10. la présentation d'un module de type fini sur un anneau principal (le plus souvent euclidien) et l'application aux groupes abéliens de type fini et aux invariants de similitude.

Ce qu'il faut retenir

Soit E un espace vectoriel muni d'une base (e_i) et soit (e'_i) une « nouvelle base » de E. Ces deux bases de E sont indexées par $\{1 \ldots n\}$ où $n = \dim(E)$.

Voici les deux choses qu'il faut retenir lorsque l'on souhaite procéder à un changement de base de la base (e_i) à la base (e'_i) :

- *L'application linéaire qui intervient dans un changement de base est l'identité,* car on ne change rien aux vecteurs. On change seulement les coordonnées des vecteurs dans une base.
- *La matrice de passage contient en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base (e'_i) exprimées dans l'ancienne base (e_i) .*

A partir de ces deux données on retrouve la définition de la matrice de passage P dites « de (e_i) à (e'_i) ». C'est la matrice de Id dans les bases

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P]{Id} \underset{(e_i)}{E}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $(e_1,\ e_2)$, on pose $e'_1 = 2e_1 + 5e_2$ et $e'_2 = e_1 + 7e_2$. La matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base $(e'_1,\ e'_2)$ est

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{Id}(e'_1) & \mathrm{Id}(e'_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le diagramme, avec l'application Id, permet de tout reconstituer. Il est important de *faire ce diagramme et de bien voir la matrice de passage comme matrice de l'identité* dès que l'on aborde un changement de base.

Privilégiez les manuels qui proposent des diagrammes ou des schémas : [JPE], [RDO1], [Gob], par exemple.

Attention :
La nouvelle base est celle de l'espace de départ (Ne pas chercher à le retenir mais plutôt à bien le comprendre).
La raison de ce choix, c'est que, dans les situations standards, on se donne bien les vecteurs de la nouvelle base par leur coordonnées dans l'ancienne base.

On conviendra dans tout ce texte que la nouvelle base sera notée avec les mêmes lettres que l'ancienne, mais affectées d'un '. De même les nouvelles coordonnées seront notées avec les mêmes lettres que les anciennes affectées d'un '.

Retour au début

Voici une liste des sujets, apparaissant dans les leçons d'agrégation, sur lesquels on peut facilement vous poser des questions « indiscrètes » concernant les changements de base et les matrices de passage :

1. Algèbre linéaire (Voir [JPE])
   - Réduction d'un endomorphisme ; sous-espaces stables
   - Endomorphismes diagonalisables, nilpotents
   - Exponentielle de matrice
   - Polynômes d'endomorphismes
   - Groupe linéaire ; décomposition remarquable dans $GL(E)$
   - Déterminant
   - Matrices semblables, matrices équivalentes (pensez aux opérations élémentaires)
   - Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice (voir [JPE] p.40 et p.64, [Grif] ch2, [Art] ch1 §2 et ch 12 §2, [Ser] ch 8 §2)
2. Algèbre bilinéaire et géométrie (voir [Aud], [RDO2], [LFA1], [LFA3], [Ser])
   - Formes quadratiques ; quadriques (Méthode de Gauss)
   - Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien
   - Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien
   - Coniques (Voir [RDO2] p.35 et [LFA1] ch XIII p.415)
   - Courbes et surfaces (réduction des deux formes fondamentales) (Voir [LFA3] ch IX exemple p.514)
   - Isométries
3. Module de type fini sur un anneau principal (voir [Art] le plus simple, [Gob] ch 8, [Ser] ch 6)
   - Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice
   - Matrices équivalentes (Voir [Art] ch 12 §2 et exemple 4.5 p.459)
   - Sous-module d'un module de type fini sur un **anneau principal**
     - Réseaux (Voir [Art] p.462, [Gob] p.210)
   - Présentation d'un module de type fini sur un **anneau principal** ([Art] p.464)
     - Groupe abélien donnés par générateurs et relations
     - Invariants de similitude ; sous-espaces stables
4. En modélisation questions fréquentes d'algèbre linéaire mettant en difficulté les candidats. (voir rapport de jury 2004)

Retour au début

0.1 Changement de coordonnées

Le changement de coordonnées correspond à un changement de base et à l'application identité qui ne change rien aux vecteurs. Il change seulement les coordonnées des vecteurs en changeant la base.
Regardons l'effet sur les coordonnées du changement de base, dit « de (e_i) à (e'_i) », schématisé par

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P]{Id} \underset{(e_i)}{E} .$$

si $\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, $\mathrm{Id}(\overrightarrow{V}) = \overrightarrow{V}$ se traduit par

$$P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On pourra aussi schématiser le changement de coordonnées par

$$\underset{X'}{E, (e'_i)} \xrightarrow[P]{Id} \underset{X}{E, (e_i)}$$

d'où $PX' = X$.
Autrement dit, la matrice de passage donne
(en ligne) les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.
Souvent, dans la pratique, c'est « l'inverse » que l'on a : on pose un « changement de variables » en se donnant les nouvelles coordonnées des vecteurs en fonction des anciennes et l'on cherche le changement de base correspondant.

Voici un exemple concret de changement de variables dans $\mathbb{R}^2$:

$$x'_1 = x_1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad x'_2 = x_2$$

On en déduit

$$x_1 = x'_1 - 2x'_2 \quad \text{et} \quad x_2 = x'_2$$

D'où les lignes de la matrice P et la relation entre les coordonnées :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X'$$

On lit dans les colonnes de P les coordonnées des nouveaux vecteurs de base dans l'ancienne base.

$$e'_1 = e_1 \quad \text{et} \quad e'_2 = -2e_1 + e_2$$

Retour au début

La <u>dualité</u> et le changement de coordonnées.

Si on le souhaite, un changement de coordonnées peut aussi s'exprimer dans le dual E^* muni des bases duales (e_i^*) et $({e'_i}^*)$. Le schéma correspondant (seule chose à savoir retrouver rapidement) devient

$$\underset{(e_i{}^*)}{E^*} \xrightarrow[{}^tP]{Id} \underset{({e'_i}^*)}{E^*}$$

<u>Attention</u> :
Dans le passage au dual le sens de la flèche change et la matrice est tranposée. Ce schéma représente le changement de base de ${e'_i}^*$ à $e_i{}^*$ et il a pour matrice ${}^tP$. Donc le changement de base de $e_i{}^*$ à ${e'_i}^*$ a pour matrice $({}^tP)^{-1}$.

La traduction pour l'exemple précédent de

$$x'_1 = x_1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad x'_2 = x_2$$

sur les formes coordonnées est

$${e'_1}^* = e_1{}^* + 2e_2{}^* \quad \text{et} \quad {e'_2}^* = e_2{}^*.$$

D'où

$$e_1{}^* = {e'_1}^* - 2{e'_2}^* \quad \text{et} \quad e_2{}^* = {e'_2}^*.$$

Dans ce langage, ce sont les colonnes $(\mathrm{Id}(e_1{}^*),\ Id(e_2{}^*))$de la matrice ${}^tP$ que l'on obtient :

$${}^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais comme on l'a vu plus haut, on peut très bien ne pas parler de dualité dans un changement de coordonnées.

Retour au début

0.2 Changement de base pour une application linéaire

Le plus simple pour bien comprendre est de considérer le cas de deux espaces distincts munis chacun de deux bases différentes : les bases (e_i) et (e'_i)

pour E et (f_j) et (f'_j) pour F. Représentons sur un diagramme les applications linéaires et leur matrice dans les bases indiquées :

$$\begin{array}{ccc} E,(e_i) & \xrightarrow[M]{f} & F,(f_j) \\ {\scriptstyle I_E}\Big\uparrow{\scriptstyle P_1} & & {\scriptstyle P_2^{-1}}\Big\downarrow{\scriptstyle I_F} \\ E,(e'_i) & \xrightarrow[f]{M'} & F,(f'_j) \end{array}$$

On voit sur ce diagramme que I_F ne correspond pas au changement de (f_j) à (f'_j) mais à son inverse. C'est donc l'inverse de la matrice de passage qui intervient à cet endroit.
Pour ne pas faire d'erreur sur le sens des flèches on peut préférer un diagramme en ligne.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow[P_1]{I_E} & E & \xrightarrow[M]{f} & F & \xrightarrow[P_2^{-1}]{I_F} & F \\ (e'_i) & & (e_i) & & (f_i) & & (f'_i) \end{array}$$

Pour obtenir les relations entre les matrices il suffit d'écrire sans se tromper d'ordre les relations entre applications linéaires.

$$\begin{array}{ccccccc} I_F & \circ & f & \circ & I_E & = & f \\ P_2^{-1} & & M & & P_1 & = & M' \end{array}$$

Lorsque qu'on a compris ce qui se passe quand les deux espaces sont différents, c'est facile de particulariser au cas $E = F$ et $f : E \longrightarrow E$. Il suffit de retenir le schéma et la formule qui en découle.
Pour ne pas se tromper entre P et P^{-1}, on peut se redire la phrase :
la matrice de passage contient en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base et c'est la matrice de l'identité.
On peut aussi mettre dans le schéma des indices à l'application identité I_E, selon sa position dans le diagramme, pour distinguer plus facilement les deux matrices correspondantes.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow[P]{Id_1} & E & \xrightarrow[M]{f} & E & \xrightarrow[P^{-1}]{Id_2} & E \\ (e'_i) & & (e_i) & & (e_i) & & (e'_i) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} Id_2 & \circ & f & \circ & Id_1 & = & f \\ P^{-1} & & M & & P & = & M' \end{array}$$

On peut éventuellement retenir : « $P_2^{-1}MP_1$ ou $P^{-1}MP$ »
La « matrice de passage inverse » se trouve toujours à gauche de M.
Mais il est prudent de savoir le retrouver.

Retour au début

0.3 Changement de base pour une forme bilinéaire

Soit f une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension n.
Si (e_i) est une base de E, on associe à f la matrice $M = (f(e_i, e_j)_{i=1\dots n,\ j=1\dots n})$.
Soient x et y sont deux vecteurs de E et X et Y les matrices colonnes de leurs composantes dans cette même base. On a la relation, facile à retenir :

$$f(x, y) = {}^tXMY$$

Si l'on travaille dans une autre base (e'_i) de E les vecteurs x et y sont représentés par de nouvelles matrices colonnes, notées respectivement X' et Y'. Le schéma de la matrice de passage (on se souvient de la phrase : *la matrice de passage contient en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base et c'est la matrice de l'identité.)*

$$\underset{X'}{E, (e'_i)} \xrightarrow[P]{Id} \underset{X}{E, (e_i)}$$

permet de retrouver $X = PX'$, $Y = PY'$.
On en déduit

$$f(x, y) = {}^tX'\, {}^tPMP\, Y'.$$

De là, la matrice de f dans la nouvelle base, $M' = {}^tPMP$.

0.4 Changement de base pour une forme quadratique

Pour les formes quadratiques, (Voir [RDO2] p.26 à p.36) les calculs sont les mêmes que ci-dessus. Il est juste nécessaire de savoir trouver directement sur l'expression de la forme quadratique la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée.
Voici un exemple caractéristique.
Considérons sur $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$. Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

La méthode de Gauss nous amène à écrire $q(x) = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2$.
Les « nouvelles » variables sont donc :

$$x'_1 = x_1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad x'_2 = x_2.$$

On en déduit

$$x_1 = x'_1 - 2x'_2 \quad \text{et} \quad x_2 = x'_2,$$

On obtient les lignes de la matrice P (non orthogonale). **On a :**

$$X = PX' \quad \textbf{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad {}^tPMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On lit dans les colonnes de P les coordonnées dans l'ancienne base des nouveaux vecteurs de base :

$$e'_1 = e_1 \quad \textbf{et} \quad e'_2 = -2e_1 + e_2.$$

Attention

- La matrice de passage donne (en ligne) les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles et, dans la méthode de Gauss, c'est « l'inverse » que l'on a directement.
- La matrice de passage obtenue par la méthode de Gauss ou de Gram-Schmidt n'est pratiquement jamais orthogonale.

Si on le souhaite, on peut exprimer ce « changement de variables » en travaillant dans le dual E^* muni des bases $({e_i}^*)$ et $({e'_i}^*)$.

Retour au début

0.5 Changement de base pour une forme hermitienne

La situation est analogue au changement de base pour les formes bilinéaires. Mais il faut se mettre d'accord sur les définitions.
« De quel côté » conjugue-t-on ?
Attention : Ce choix dépend de l'âge du manuel choisi.
Aujourd'hui, on conjugue plutôt sur la première variable. Voici ce que l'on trouve dans les manuels récents :

Soit f une forme hermitienne sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ de dimension n. On se donne deux vecteurs x et y par les matrices colonnes, notées respectivement X et Y, de leur composantes dans une base (e_i).
Si $M = (f(e_i, e_j)_{i=1\ldots n,\ j=1\ldots n})$ est la matrice de la forme hermitienne dans cette même base, on se rappelle en général aisément la relation

$$f(x, y) = {}^t\overline{X}MY.$$

Si l'on travaille dans une autre base (e'_i) de E, les vecteurs x et y sont représentés par de nouvelles matrices colonnes, notées respectivement X' et Y'. Le schéma de la matrice de passage (on se souvient de la phrase : *la matrice de passage contient en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base et c'est la matrice de l'identité.)*

$$\underset{X'}{E, (e'_i)} \xrightarrow[P]{Id} \underset{X}{E, (e_i)}$$

permet de retrouver $X = PX'$, $Y = PY'$.
On en déduit
$$f(x,y) = {}^t\overline{X'}\,{}^t\overline{P}MP\,Y',$$
et de là, la matrice de f dans la nouvelle base : $M' = {}^t\overline{P}MP$.

Méthode de Gauss pour les formes hermitiennes

Voici un exemple simple pour comprendre le principe.

Soit une forme hermitienne f donnée sur $\mathbb{C}^2$ par sa matrice hermitienne dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{C}$.
Rappelons qu'une matrice hermitienne est à diagonale principale réelle et conjuguée par symétrie par rapport à la diagonale principale. Choisissons par exemple la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}.$$
Considérons sur $\mathbb{C}^2$ la forme associée $q(x) = |z_1|^2 - i\overline{z_1}z_2 + iz_1\overline{z_2} + 2|z_2|^2$. La méthode de Gauss consiste à faire apparaître « le début » d'une norme au carré. Ceci nous amène à écrire $q(x) = |z_1 - iz_2|^2 + |z_2|^2$. On pose donc le changement de variable
$$z_1' = z_1 - iz_2 \text{ et } z_2' = z_2.$$
On en déduit
$$z_1 = z_1' + iz_2' \text{ et } z_2 = z_2'.$$
D'où les lignes de la matrice P (matrice non unitaire) :
$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Les colonnes de P nous donnent la base $(e_1' = e_1,\ \ e_2' = ie_1 + e_2)$, orthonormée.
Dans cette base la matrice de f est Id_2 et $f(x,y) = {}^t\overline{X'}Y'$.

Retour au début

0.6 La diagonalisation des matrices symétriques réelles

On démontre dans le cours (Voir [LFA1], [RDO1], [Ser], [Gour]) que toute matrice symétrique réelle, plus généralement tout opérateur normal, est diagonalisable. De plus, on peut trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

Attention :
Les sous-espaces propres sont orthogonaux, mais les bases de vecteurs propres ne sont pas toutes orthonormées. Par exemple, si l'un des sous-espaces propres

est de dimension $d \geqslant 2$, une base de ce sous-espace propre prise au hasard n'a aucune raison d'être orthonormée. Il faut d'abord choisir des vecteurs propres orthogonaux, puis, ensuite les normer. Lorsque l'on choisit une base orthonormée (orthogonale ne suffit pas) de vecteurs propres , la matrice de passage est orthogonale.

Utilité d'avoir une matrice de passage orthogonale

Le fait, dans le cas des matrices symétriques réelles, que la matrice de passage P soit orthogonale présente plusieurs intérêts.

1. On peut interpréter le changement de base dans deux domaines totalement différents :
   - les endomorphismes **linéaires** ($M' = \mathbf{P^{-1}}MP$)
   - les formes **bilinéaires** symétriques ($M' = {}^{\mathbf{t}}\mathbf{P}MP$) ou les formes quadratiques.
2. Les produits scalaires canoniques $< X, Y >= \Sigma x_i y_i$ sont identiques dans les deux bases. Ainsi les **calculs de longueurs ou d'angles** se font, sans problème, dans les deux bases.
   C'est utile pour calculer les longueurs des axes d'une ellipse par exemple. (Voir [LFA1] XII.7 p.415, [Aud], [LirMar]). Reprenons l'exemple précédent pour la conique définie par $q(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$.
   La méthode de Gauss nous amène à écrire :
   $q(x) = (x_1 + 2x_2)^2 + x_2^2 = 1$.
   Ceci nous permet de reconnaître une ellipse sans toutefois pouvoir préciser sa forme. Pour en savoir plus il nous faut un changement de base qui soit une isométrie.
   La matrice de la forme q est :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$
   Ses valeurs propres sont distinctes : $3 + 2\sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2}$. Donc dans une base orthonormée de vecteurs propres, la nouvelle matrice de q s'écrit :
   $$\begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
   et l'équation de notre ellipse devient :
   $q(X) = (3 + 2\sqrt{2}){x'_1}^2 + (3 - 2\sqrt{2}){x'_2}^2 = 1$.
   On peut alors préciser la direction des axes, celles des vecteurs propres :
   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix},$$
   et les demi-longueurs de ces axes, respectivement
   $$\frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}.$$

Pour obtenir la matrice de passage orthogonale entre bases orthonormées, il faut normer les vecteurs propres. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \\ \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} & \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Retour au début

0.7 Réduction simultanée de deux formes quadratiques

(Voir [LFA1] ch XIII §7, [RDO2] p.35).
On se donne deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur $\mathbb{R}^p$, associées respectivement à deux formes bilinéaires symétriques φ_1 et φ_2 et à deux matices symétriques M_1 et M_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On suppose φ_1 définie positive, munissant $\mathbb{R}^p$ d'une structure euclidienne.

Théorème : *Il existe une base orthonormée pour φ_1, orthogonale pour φ_2.*

Ingrédients de la preuve (Voir [LFA] et [RDO] pour plus de détails)
Etant donné un espace E de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique φ, on a une application linéaire naturelle d_φ (d comme droite) de E dans le dual E^*.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{d_\varphi} & E^* \\ y & \longmapsto & (d_\varphi(y) \ : x \mapsto \varphi(x,y)) \end{array}$$

La matrice de cette application linéaire dans une base (e_i) et dans la base associée (e_i^*) du dual n'est autre que la matrice de la forme bilinéaire symétrique φ dans la base (e_i).
Si, de plus, la forme bilinéaire φ symétrique est définie positive, le noyau de φ, qui coïncide avec $\text{Ker}(d_\varphi)$, est réduit à $\{0\}$. Donc d_φ est un isomorphisme.

Prenons $E = \mathbb{R}^p$ et considérons l'endomorphisme $u = {d_{\varphi_1}}^{-1} \circ d_{\varphi_2}$ associé à la matrice ${M_1}^{-1}M_2$.
Comme M_1 et M_2 sont symétriques, on a ${M_1}^{-1}\ {}^t({M_1}^{-1}M_2)M_1 = {M_1}^{-1}M_2$. Cette égalité exprime que u est φ_1-symétrique, c'est-à-dire, φ_1-auto-adjoint. Par suite, les sous-espaces propres de u sont automatiquement φ_1-orthogonaux. Pour obtenir la base annoncée dans le théorème, il suffit donc de déterminer les sous-espaces propres de u, puis, pour chaque sous-espace propre de u, une base orthonormée (pour φ_1). Pour cela, on utilise à l'intérieur de chaque sous-espace propre de u un procédé d'orthonormalisation (Gauss ou Gram-Schmidt). Voir

[RDO2] page 35 ou [LFA1] page 417.
On obtient une base de vecteurs propres orthonormée pour φ_1 et orthogonale pour φ_2. La matrice de passage P n'est ni orthogonale pour le produit scalaire usuel (${}^tP \neq P^{-1}$), ni φ_1-orthogonale ($P^{-1} \neq M_1^{-1}\ {}^tP\ M_1$), sauf dans le cas où la base initiale est orthonormée pour φ_1.
La traduction matricielle du théorème est que, dans la base de vecteurs propres, la matrice de φ_1 est Id et celle de φ_2 est diagonale.

Pour la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de u, on peut remarquer que

$$M_1{}^{-1}M_2(V) = \lambda V \ \text{ équivaut à } \ (M_2 - \lambda M_1)V = 0.$$

Ceci évite d'inverser M_1 et les logiciels proposent, dans leur menu, ce genre de calcul. Voir eigenvalues(M_1, M_2), en Maple.

Attention aux démonstrations « rapides » :
La matrice M_2 est symétrique et pourtant cette matrice **ne définit pas un endomorphisme auto-adjoint** pour la structure euclidienne définie par φ_1.
Dans beaucoup de livres ([Gou] page 241, [Gob] page 301), la démonstration de ce théorème utilise l'existence d'une base orthonormée pour φ_1 et se place dans cette base. Cela rend la démonstration rapide, mais, si on suit cette démarche pour construire effectivement la base recherchée, le procédé comporte deux étapes :

1. Première étape : algèbre bilinéaire
   Si on se trouve dans une base déjà orthonormée pour φ_1 cette première étape n'est pas utile.
   Sinon on commence par modifier la forme quadratique par la méthode de Gauss-Gramm-Schmidt pour obtenir une base orthonormée pour φ_1. Ce premier changement de base est uniquement dans le domaine de l'algèbre bilinéaire et la matrice de passage P_1 est « quelconque » : ${}^tP_1 \neq P_1{}^{-1}$. On modifie les deux matrices M_i en $M_i' = {}^tP_1 M_i P_1$. On ne considère aucun endomorphisme auto-adjoint dans cette première partie. On utilise seulement la méthode de Gauss-Gram-Schmidt.
2. Deuxième étape : algèbre linéaire avec un zeste de bilinéaire
   On revient dans le chapitre de la diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints. La matrice de φ_1 est Id et celle de φ_2 est symétrique. Cette matrice symétrique est la matrice de $u = d_{\varphi_1}{}^{-1} \circ d_{\varphi_2}$ et on la diagonalise dans une base orthonormée (zeste bilinéaire). On modifie les deux matrices M_i' en $M_i'' = P_2^{-1} M_i' P_2$.

« *C'est en forgeant que l'on devient forgeron.* »

Un exemple simple des deux itinéraires possibles de calcul, avec des matrices

2×2, permet de comprendre les deux manières de présenter la démonstration.

Exercice corrigé (imprimer les tableaux des deux dernières pages) :
Considérons dans $\mathbb{R}^2$, deux formes quadratiques définies par leur matrice respective dans la base canonique.

$$M(q_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad M(q_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que la forme q_1 est définie positive et déterminer en suivant les différentes démonstrations des livres, une base orthonormale pour q_1 et orthogonale pour q_2. Les différentes matrices de passage utilisées sont-elles orthogonales ?
Vérifiez vos calculs en regardant les tableaux comparatifs des deux méthodes en fin de fichier.

Voir aussi le problème de Mathématiques générales 2001, où cette question d'orthogonalisation simultanée intervient.

Retour au début

0.8 Les opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'une matrice

L'interprétation des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice (Voir [JPE] p.40 et p.64, [Grif] ch2, [Art] p.11 et p.457 à 479) dépend de ce que représente la matrice sur laquelle on opère.
Soit M la matrice d'une application linéaire :

$$\underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(f_i)}{F}$$

où E et F désigne des espaces vectoriels sur un corps ou plus généralement des modules libres sur un anneau, munis de leur base respective.
La matrice obtenue en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de M peut être interprétée comme une nouvelle matrice de f avec des changements de base adaptés dans les espaces E et F. Regardons de plus près la différence d'interprétation, en terme de changement de base, entre les opérations élémentaires sur les colonnes et celles sur les lignes de la matrice M.

- Si nous opérons sur les colonnes de la matrice, par exemple si nous ajoutons à la j-ième colonne C_j une combinaison linéaire des autres

  $$C'_j = C_j + \Sigma_{k \neq j} \lambda_k C_k$$

  cela revient juste à changer dans la base de l'espace de départ e_j en $e'_j = e_j + \Sigma_{k \neq j} \lambda_k e_k$ et la matrice de passage correspondante

  $$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P_1]{Id} \underset{(e_i)}{E}$$

ne diffère de l'identité que par sa j-ième colonne :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \lambda_{n-1} & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \lambda_n & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour comprendre ce que représente la nouvelle matrice, on peut dessiner un diagramme :

$$\underset{(e'_i)}{E} \xrightarrow[P_1]{I_E} \underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(f_i)}{F}$$

La nouvelle matrice MP_1 est la matrice de f dans les bases (e'_i) et (f_i) .

– **Si nous opérons sur les lignes de la matrice, c'est moins simple.**
Par exemple, si nous ajoutons à la i-ième ligne L_i un multiple d'une autre ligne

$$L'_i = L_i + \lambda L_k$$

cela revient à multiplier à gauche la matrice M par une matrice de transvection :

$$T_{i,k}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = I + \lambda E_{i,k}$$

Le λ se trouve dans la k-ième colonne (et non la i-ième). Cette opération sur les lignes revient à changer la base de l'espace d'arrivée.
En regardant le diagramme suivant

$$\underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(f_i)}{F} \xrightarrow[T_{i,k}(\lambda)]{I_F} \underset{(f'_i)}{F}$$

on voit que la nouvelle matrice de f est $T_{i,k}(\lambda)M$. Pour obtenir la nouvelle base, regardons la matrice de passage correspondant à ce changement de base :

$$\underset{(f'_i)}{F} \xrightarrow[P_2]{Id} \underset{(f_i)}{F}$$

On l'obtient en inversant $T_{i,k}(\lambda)$. On peut retenir et retrouver facilement que *l'inverse d'une matrice de transvection s'obtient en changeant simplement λ en $-\lambda$ sans changer les indices.*

La matrice obtenue $P_2 = T_{i,k}(-\lambda)$, ne diffère de l'identité que par sa **k-ième colonne (et non la i-ième)** (et sa i-ième ligne) :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\lambda & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce changement de base correspond donc à changer f_k en $f'_k = f_k - \lambda f_i$, c'est-à-dire à **modifier le k-ième vecteur de base et non pas le i-ième**. (bien y réfléchir à tête reposée)

En bref :

Remplacer C_i en $C'_i = C_i + \lambda C_k$ correspond à changer la base de départ e_i en $e'_i = e_i + \lambda e_k$.

Par contre

Remplacer L_i en $L'_i = L_i + \lambda L_k$ correspond à changer la base d'arrivée f_k en $f'_k = f_k - \lambda f_i$.

Bien comprendre ces changements de base est indispensable lorsque l'on recherche une base adaptée pour un sous-module d'un module libre sur un anneau euclidien. (Voir le paragraphe suivant)

Retour au début

0.9 La recherche d'une base adaptée pour un sous-module d'un module libre de type fini sur un anneau euclidien

Soient A un anneau euclidien, F un $A-$module libre de base $((f_i)_{i=1\dots m})$ et G un sous-module de F. On suppose déjà démontré le fait que tout sous module d'un $A-$module libre de type fini est de type fini. Le fait que G est, de plus, libre va résulter de ce qui suit.
Concrétement, on se donne G par la matrice M qui contient en colonne les composantes de ses n générateurs exprimés dans la base (f_i) du module F. On retrouve la situation du paragraphe précédent en considérant l'application linéaire f du A-module libre $E = A^n$ dans le module F :

$$\underset{(e_i)}{E} \xrightarrow[M]{f} \underset{(f_i)}{F}$$

On démontre (Voir [Art] p.457) que, par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de M, on peut la transformer en une matrice M'

$$M' = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & a_k & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

où chaque a_i divise a_{i+1}. Dans le contexte, cela correspond à obtenir une nouvelle base $((f'_i)_{i=1\dots m})$ de F telle que la famille libre $(a_1 f'_1,\ \dots,\ a_k f'_k)$ engendre G. Ceci démontre la liberté du sous-A-module G.

Dans cette démonstration, il faut faire **attention** à l'interprétation des **opérations élémentaire sur les lignes** de la matrice. En voici un petit exemple pour un sous-module de $\mathbb{Z}^2$.

Sous-module de $\mathbb{Z}^2$ (dessiné dans Artin page 463)

Soit $(f_1,\ f_2)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^2$ et G le sous-module engendré par $e_1 = f_1 + 2f_2$ et $e_2 = -2f_1 - f_2$. Dans cet exemple, les générateurs de G sont libres sur $\mathbb{R}$, donc libres sur $\mathbb{Z}$ et l'application f est simplement l'injection de G dans $\mathbb{Z}^2$. Pour obtenir une base plus simple de ce sous-module, on réalise des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On opére d'abord sur les colonnes, ce qui revient à changer la base du sous-module. L'opération $C'_2 = C_2 + 2C_1$ correspond à changer e_2 en $e'_2 = e_2 + 2e_1 = (0,\ 3)$. On obtient

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = MP_1 \quad \text{avec} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nouvelle base du sous-module : $(e_1 = (1,2),\ e'_2 = (0,\ 3))$.
Puis on modifie la **2-ème ligne :** $L'_2 = L_2 - 2L_1$**.** Ceci correspond à changer **le premier vecteur de base** du module (bien y réfléchir à tête reposée) : $f'_1 = f_1 + 2f_2 = (1,\ 2)$.
On obtient la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P_2^{-1} M_1 \ \text{ avec } \ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Facteurs invariants du sous-module : 1 et 3.
Nouvelle base du module : $(f'_1 = (1,2),\ f_2 = (0,\ 1))$.

Base du sous-module : $(e'_1 = e_1 = (1,2) = f'_1,\ e'_2 = 3f_2 = (0,\ 3))$.
Pour plus de détails, voir les opérations élémentaires sur la matrice d'une application linéaire ci-dessus et regarder les dessins dans [Art] p.463.

Retour au début

0.10 Présentation d'un module de type fini sur un anneau euclidien. Application aux groupes abéliens de type fini et aux invariants de similitude.

0.10.1 Groupes abéliens de type fini

Maintenant considérons un module de type fini sur un anneau euclidien A. On peut définir ce module par ses générateurs et l'espace des relations qui lient ses générateurs. A cette définition on associe une matrice. Par des opérations élémentaires sur cette matrice, on démontre que le module peut être défini par des nouveaux générateurs $(g'_1,\ \dots\ g'_k,\ \dots\ g'_n)$, soumis à des relations $(a_1 g'_1 = 0, \dots\ a_k g'_k = 0)$ où chaque a_i divise a_{i+1}. Certains générateurs (les derniers) peuvent être libres de toute relation.
Nous allons le montrer sur un exemple, l'exemple d'un groupe abélien, autrement dit un $\mathbb{Z}$-module G, défini par trois générateurs g_1, g_2 et g_3 et trois relations (Voir [Art] p.464 et p.471) :

$$\begin{array}{c} g_1 + 2g_2 = 0 \\ -2g_1 - g_2 = 0 \\ 3g_1 + 3g_2 = 0 \end{array}$$

Plus précisemment cela revient à dire que l'on a une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules (groupes abéliens) :

$$\begin{array}{c} E \\ (e_i) \end{array} \xrightarrow[M]{h} \begin{array}{c} F \\ (f_i) \end{array} \xrightarrow{g} G \longrightarrow \{0\}$$

où E est un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ et F un $\mathbb{Z}$-module libre de base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$. L'application h est définie par sa matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et g est définie par $g(f_1) = g_1,\ \ g(f_2) = g_2$ et $g(f_3) = g_3$.
Les colonnes de la matrice engendrent $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Ker}(g)$, c'est-à-dire l'espace des relations entre les g_i. Par des opérations élémentaires sur la matrice M, nous allons « simplifier » cette présentation de G.

On ne change pas $\mathrm{Im}(h)$, ni, par suite, cet espace de relations, en changeant la base de E. C'est ce que l'on fait en faisant des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice :

$$C'_2 = C_2 + 2C_1 \quad \text{et} \quad C'_3 = C_3 - 3C_1.$$

Avec ce changement de base, la matrice de h devient :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut encore faire l'opération sur les colonnes $C''_3 = C'_3 + C'_2$ qui nous donne la matrice :

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

correspondant à un nouveau changement de base sur E. La colonne nulle a pour signification la relation $0 = 0$. On peut donc la supprimer. On aboutit au diagramme

$$\begin{array}{c} E' \\ (e'_i) \end{array} \xrightarrow[M_1]{h_1} \begin{array}{c} F \\ (f_i) \end{array} \xrightarrow{g} G \longrightarrow \{0\}$$

où $\mathrm{Im}(h_1)$ est toujours égal à $\mathrm{Ker}(g)$, ensemble des relations entre les générateurs de G. Mais E' est cette fois un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2, de base $(e'_1,\ e'_2)$ et la matrice de h_1 est :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Modifions la **<u>deuxième ligne</u> :** $L'_2 = L_2 - 2L_1$**.** Ceci correspond à changer **<u>le premier vecteur de base</u>** du module F en $f'_1 = f_1 + 2f_2$ (Bien y réfléchir à tête reposée). On obtient la nouvelle matrice de h_1 :

$$M'_1 = P^{-1}M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

$$\text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schématisons ce changement de base :

$$\begin{tikzcd}
E', (e'_i) \arrow[r, "h_1", "M_1"'] \arrow[dr, "h_1", "M'_1"'] & F, (f_j) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "P^{-1}"', "\mathrm{Id}"] & G \arrow[r] & \{0\} \\
& F, (f'_j) \arrow[r, "g"] & G \arrow[r] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

Cela correspond à choisir un nouveau système de générateurs pour G

$$g'_1 = g_1 + 2g_2, \ \ g'_2 = g_2 \ \text{ et } \ g'_3 = g_3$$

soumis aux relations $g'_1 = 0$ et $3g'_2 = 0$. Le générateur g'_1 est nul, il ne sert à rien. Notre groupe abélien G a un générateur $g'_2 = g_2$ soumis à la relation $3g'_2 = 0$ et un autre générateur libre $g'_3 = g_3$, soumis à aucune relation. Donc G est isomorphe à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

NB : Il n'est pas utile de connaître présicément les changements de base sur E et pour cette raison on n'écrit aucune matrice de passage dans E. Pour obtenir les nouveaux générateurs de G, seuls les changements de base sur F sont utiles et pour les nouvelles relations sur ces générateurs, c'est la nouvelle matrice qui nous les donne.

Retour au début

0.10.2 Invariants de similitude, sous-espaces stables

(Voir [Art] p.476, [Gob] p.199 à 205, [Tau] ch.XVII, §8)
On a une situation analogue pour la recherche des invariants de similitude d'un endomorphisme u de l'espace vectoriel E de dimension n dont la matrice est $M = (m_{i,j})_{i=1...n,\ j=1...n}$ dans la base (e_i) de E. Les invariants de similitude de M c'est une famille de polynômes $(P_1, \dots, P_k)$ tels que P_i divise P_{i+1} et qui caractérise la classe de similitude de M. Toute matrice de cette classe est semblable à une matrice diagonale par blocs (matrices compagnons des P_i).
On considère la structure de $K[X]$-module sur E définie pour tout vecteur x de E par $X.x = u(x)$. Chaque **sous-$K[X]$-module de E** correspond à un **sous-espace vectoriel de E stable par u**. Voir un dictionnaire complet dans [Art] p.478.
Le $K[X]$-module E est défini par générateurs et relations au moyen de la suite exacte de $K[X]$-modules :

$$K[X]^n \xrightarrow[M_1 = M - XI]{h} K[X]^n \xrightarrow{\quad g \quad} E \xrightarrow{\qquad} \{0\}$$

Autrement dit, les relations (colonnes de la matrice $M - XI$) liant les n générateurs e_i du $K[X]$-module E sont, tout simplement :

$$X.\ e_j = u(e_j) = \Sigma_{i=1}^{n}\ m_{i,j}\ e_i.$$

Des opérations élémentaires sur la matrice $M - XI$, basées sur la division euclidienne dans $K[X]$, permettent d'obtenir une matrice de présentation M'_1

diagonale pour le $K[X]$-module E :

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & P_{k-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & P_k \end{pmatrix}$$

où chacun des P_i divise P_{i+1}. Comme les « 1 » correspondent à des générateurs nuls on peut les supprimer. Ainsi le $K[X]$-module E est isomorphe à

$$K[X]/P_1 \times \dots \times K[X]/P_k.$$

Remarque : Dans ce cas, la matrice réduite M_1' ne peut contenir de colonne nulle car celle-ci correspondrait à une composante libre du $K[X]$-module E et comme $K[X]$ est de dimension infinie comme K-espace vectoriel, on aboutirait à une contradiction sur la dimension finie de E comme espace vectoriel sur K.
Les P_i sont les invariants de similitude de u. Pour obtenir la forme de Jordan sur la clôture algébrique de K, il suffit de décomposer complètement chaque facteur $K[X]/P_i$ à l'aide du théorème chinois.
Par exemple, si $P_1(X) = (X-2)(X-3)^2$ et $P_2(X) = (X-2)(X-3)^3$ sont les invariants de similitude de $u\ : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$, le $K[X]$-module E est isomorphe à

$$K[X]/(X-2) \times K[X]/(X-3)^2 \times K[X]/(X-2) \times K[X]/(X-3)^3$$

et la forme de Jordan de u sera :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 3 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 3 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vecteur cyclique :
Si l'on veut trouver un vecteur cyclique correspondant à chaque facteur invariant, il suffit de garder en mémoire les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice $M - XI$. On en déduit la matrice de passage correspondante sur le module libre $K[X]^n$ et ainsi on trouve le nouveau système de générateurs du $K[X]$-module E. Schématisons ce changement de base :

$$\begin{tikzcd} K[X]^n \arrow[r, "h", "M-XI"'] & K[X]^n, (f_i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "P^{-1}"', "\mathrm{Id}"] & E \arrow[r] & \{0\} \\ & K[X]^n, (f_i') \arrow[r, "g"] & E \arrow[r] & \{0\} \end{tikzcd}$$

Si par exemple on trouve dans les deux dernières colonnes de P correspondant aux facteurs invariants P_1 et P_2

$$P = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & X+4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & X^2-3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on en déduit que le vecteur $v = (u^2 - 3Id)(e_2) + 5e_3 + e_6$ de E est générateur du $K[X]$-module $K[X]/P_1$ autrement dit v est cyclique pour P_1.
Concrètement cela signifie que

- E_1 =Vect$(v, u(v), u^2(v))$ est un sous-espace vectoriel stable,
- $(v, u(v), u^2(v))$ est une base de E_1,
- la matrice de la restriction de u à E_1 dans cette base est la matrice compagnon de P_1.

De même, le vecteur $w = u(e_1)+4e_1+e_7$ de E sera générateur du $K[X]$-module $K[X]/P_2$ autrement dit w est cyclique pour P_2.

Retour au début

TAB. 1 – **Schéma de l'algorithme direct de réduction simultanée de deux formes quadratiques :**

base	matrice de passage	$M(q_1)$ q_1 forme quadratique définie positive algèbre bilinéaire	$M(q_2)$ q_2 forme quadratique algèbre bilinéaire	$M(u)$ u endomorphisme q_1-auto-adjoint algèbre linéaire
(e_i) non q_1-orthonormée		$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$A = M_1^{-1} M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non symétrique mais q_1-auto-adjointe, car $M_1^{-1}\ {}^tA\ M_1 = A$
algèbre linéaire : (W_i) vecteurs propres de A algèbre bilinéaire : choisis orthogonaux pour q_1 puis normés pour q_1 $(U_i) = \left(\dfrac{W_i}{\sqrt{q_1(W_i)}} \right)$	$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrice non orthogonale c'est-à-dire telle que ${}^tP \neq P^{-1}$ De plus P n'est pas q_1-orthogonale car (e_i) non q_1-orthonormée $P^{-1} \neq M_1^{-1}\ {}^tP\ M_1$	$M_1''' = {}^tPM_1P = I_2$	$M_2''' = {}^tPM_2P =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$A''' = P^{-1}AP =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

TAB. 2 – **Schéma de l'algorithme du livre de Gourdon de réduction simultanée de deux formes quadratiques :**

base	matrice de passage	$M(q_1)$ q_1 forme quadratique définie positive algèbre bilinéaire	$M(q_2)$ q_2 forme quadratique algèbre bilinéaire	$M(u)$ u endomorphisme q_1-auto-adjoint algèbre linéaire
(e_i)		$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	aucune matrice d'endomorphisme auto-adjoint pour q_1
(V_i) orthonormée pour q_1 obtenue par la méthode de Gauss pour q_1	$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non orthogonale algèbre bilinéaire	$M'_1 = {}^tP_1 M_1 P_1 = Id_2$	$M'_2 = {}^tP_1 M_2 P_1 =$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$B_1 = M'_2$ matrice symétrique diagonalisable dans une base q_1-orthonormée
$W_1 = V_1 + V_2$ $W_2 = V_1 - V_2$ vecteurs propres de B_1 orthogonaux pour q_1	$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ obtenue par diagonalisation de u algèbre linéaire avec un zeste de bilinéaire	$M''_1 = {}^tP_2 I_2 P_2 =$ $\begin{pmatrix} \parallel W_1 \parallel^2 & 0 \\ 0 & \parallel W_2 \parallel^2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $\parallel W_i \parallel = \sqrt{q_1(W_i)}$	$M''_2 = {}^tP_2 M'_2 P_2 =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 \parallel W_1 \parallel^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \parallel W_2 \parallel^2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ où $\parallel W_i \parallel = \sqrt{q_1(W_i)}$	$B_2 = P_2^{-1} B_1 P_2 =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$(U_i) = \left(\dfrac{W_i}{\parallel W_i \parallel} \right)$ normés pour q_1 puisque $\parallel W_i \parallel = \sqrt{q_1(W_i)}$	$P_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ la matrice $P_4 = P_2 P_3$ est orthogonale $P_4^{-1} = {}^tP_4$	$M'''_1 = {}^tP_3 M''_1 P_3 = Id_2$	$M'''_2 = {}^tP_3 M''_2 P_3 =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$B_3 = P_3^{-1} B_2 P_3 =$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Bibliographie

[Art] M.Artin, Algebra, Prentice Hall
(Très bien pour tout ce qui concerne les modules sur un anneau principal, les opérations élémentaires sur les matrices dans $\mathbb{Z}$ ou $K[X]$, les réseaux, les groupes abéliens de type fini. et les invariants de similitude.)

[Aud] M.Audin, Géométrie, Belin (A regarder pour l'étude affine et métrique des coniques à partir de leur équation).

[Gob] R.Goblot, Algèbre linéaire, Masson (Diagramme pour les changement de base).

[Gour] X.Gourdon, Mathématiques pour M', Ellipses.

[Grif] J.Grifone, Algèbre linéaire, Cepadues.(bon livre de premier cycle classique. Assez bref sur les matrices de passage. Quelques erreurs. Remettre les vecteurs à la verticale).

[JPE] J.P.Escofier.Toute l'algèbre du premier cycle, Dunod (Diagramme pour les changement de base).

[LFA1] Lelong-Ferrand, J.M.Arnaudies, t1 Algèbre, Dunod.

[LFA3] Lelong-Ferrand, J.M.Arnaudies, t3 Géométrie, Dunod.

[LiMar] F.Liret, D.Martinais, Algèbre et géométrie 2-ième année, Dunod. (Bon livre de premier cycle, exemple explicite d'étude métrique de conique)

[RDO1] E.Ramis, G.Deschamps, J.Odoux, Math Spé 1, Masson. (De bons schémas dans le chapitre sur les matrices)

[RDO2] E.Ramis, G.Deschamps, J.Odoux, Math Spé 2, Masson.(Pour l'algèbre bilinéaire et la géométrie, en particulier, la réduction simultanée de deux formes quadratiques)

[Ser] D.Serre, Les Matrices, Dunod. (Très clair et concis sur la réduction des endomorphismes normaux, contient par ailleurs, Perron-Frobenius et module sur A principal. Attention, erreur en haut de la page 3).

[Tau] P.Tauvel, Mathématiques générales pour l'agrégation, Masson.